Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (5/6/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0001 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

<u>Câu 1</u> Cho số phức $z = \dfrac{17}{4+i} - i^{2019} + e^{3+5i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = e^3 \sin 5$
B) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = -e^3 \sin 5$
C) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = -2 + e^3 \sin 5$
D) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = 2 + e^3 \sin 5$

<u>Câu 2</u> Với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{-\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2 = (a+ib)e^{-\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3 = (a+ib)e^{-\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4 = (a+ib)e^{-\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5 = (a+ib)e^{-2\pi i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.
B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.
C) $z_o, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.
D) $z_o, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

<u>Câu 3</u> Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ qua phép biến hình $w = \dfrac{6}{\bar{z}} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.
B) Đường tròn $u^2 + v^2 = 6$.
C) Đường tròn $u^2 + v^2 = 36$.
D) Đường thẳng $u^2 + v^2 = \sqrt{6}$.

<u>Câu 4</u> Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 16xy - 6y + 9$ và $v(x,y) = 8y^2 - 8x^2 + 6x + 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

<u>Câu 5</u> Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z = 3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{iz} + 6z + 2}{(z-3i)^2}$

C) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=4} \frac{e^{iz} + 6z + 2}{(z-3i)^2} dz = 2\pi i(ie^{-3} + 6)$

D) $\displaystyle\oint_{|z-3|=2} \frac{e^{iz} + 6z + 2}{(z-3i)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz} + 6z + 2}{(z-3i)^2}, 3i\right]$

<u>Câu 6</u> Cho phương trình vi phân: $y' + 5y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 6.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY + 5Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3} + 6$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+5)} + \dfrac{6}{p+5}$ (3)

♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\frac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+5}\right)+\frac{6}{p+5}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\frac{1}{2}\left(e^{-3(t-2\pi)}-e^{-5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi)+6e^{-5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 7 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch4udu\right]=\frac{p-5}{p((p-5)^2-4)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D)Nếu $f(t)=\begin{cases}\sin 4t & khi \quad 0<t<2\pi\\ 0 & khi \quad 2\pi<t<3\pi\end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin 4tdt$

Câu 8 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=-2i$ là $e^{\frac{1}{z+2i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}$

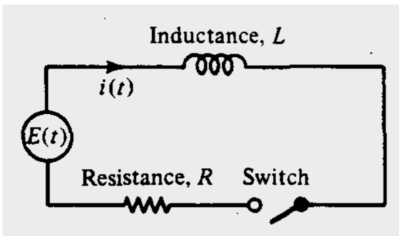
B) Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=-2i$ là $f(z)=(z+2i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^{n-3}}$

C) $\oint_{|z+3i|=3}(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}},-2i]$

D) $\oint_{|z-3i|=4}(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}}dz=2\pi i\frac{1}{4!}=\frac{\pi i}{12}$

Câu 9

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân $L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.



Trường hợp $E(t)=E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[i'(t)]$ = p**I**-i(0) = p**I**

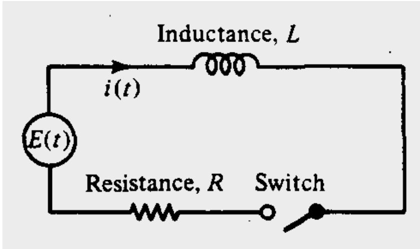
Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\frac{E_o}{p}$ (2)

Giải (2) tìm **I** và phân tích thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\frac{E_o}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (3)

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (3) ta được: i(t) = $\mathscr{L}^{-1}[I]=\frac{E_o}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 10



Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân
$L\dfrac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.
Trường hợp $E(t)=E_o\sin 6t$ với $E_o = const > 0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[\mathrm{i(t)}] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[\mathrm{i'(t)}]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{6E_o}{p^2+36}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\times\dfrac{6}{(p^2+36)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+6B}{p^2+36}+\dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A, B, C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t) = \mathscr{L}^{-1}[\,I\,] = \dfrac{E_o}{L}\left(A\cos 6t + B\sin 6t + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)= 1+e^{2t}-10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)\,du$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=3 \\ x+y'-7y=e^{2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)= y(0) = 0$$

Câu 13 (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+12y=6+e^{-t}+\sin 5t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 8	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 9 đến câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 1 tháng 6 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (5/6/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ ***HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018***
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (5/6/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0010 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào ***BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM*** **ở trang 6)**

Câu 1 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ **B)** $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch4udu\right] = \dfrac{p-5}{p((p-5)^2-4)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 4t & khi \quad 0 < t < 2\pi \\ 0 & khi \quad 2\pi < t < 3\pi \end{cases}$ và $f(t+3\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin 4tdt$

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = -2i$ là $e^{\frac{1}{z+2i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z) = (z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = -2i$ là $f(z) = (z+2i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+2i)^{n-3}}$

C) $\oint_{|z+3i|=3}(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}dz = 2\pi i \operatorname{Res}[(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}, -2i]$ **D)** $\oint_{|z-3i|=4}(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}dz = 2\pi i\dfrac{1}{4!} = \dfrac{\pi i}{12}$

Câu 3 Cho số phức $z = \dfrac{17}{4+i} - i^{2019} + e^{3+5i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = e^3\sin 5$
B) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = -e^3\sin 5$
C) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = -2 + e^3\sin 5$
D) $\operatorname{Re} z = 4 + e^3\cos 5$, $\operatorname{Im} z = 2 + e^3\sin 5$

Câu 4 Với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{-\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2 = (a+ib)e^{-\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3 = (a+ib)e^{-\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4 = (a+ib)e^{-\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5 = (a+ib)e^{-2\pi i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.
B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.
C) $z_o, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.
D) $z_o, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

Câu 5 Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ qua phép biến hình $w = \dfrac{6}{z} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.
B) Đường tròn $u^2 + v^2 = 6$.
C) Đường tròn $u^2 + v^2 = 36$.
D) Đường thẳng $u^2 + v^2 = \sqrt{6}$.

Câu 6 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=16xy-6y+9$ và $v(x,y)=8y^2-8x^2+6x+1$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 7 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}$

C) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=4}\frac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}dz=2\pi i(ie^{-3}+6)$

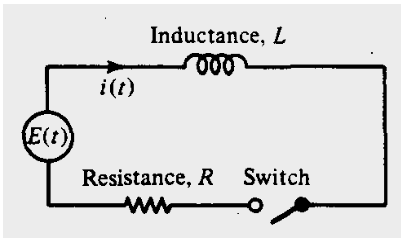
D) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2},3i]$

Câu 8 Cho phương trình vi phân: $y'+5y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 6.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY+5Y=\dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3}+6$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y=\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+5)}+\dfrac{6}{p+5}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y=\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{1}{p+5}\right)+\dfrac{6}{p+5}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y=\dfrac{1}{2}\left(e^{-3(t-2\pi)}-e^{-5(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi)+6e^{-5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9



Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân
$L\dfrac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.
Trường hợp $E(t)=E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[\mathrm{i(t)}]\Rightarrow\mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[\mathrm{i'(t)}]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{E_o}{p}$ (2)

Giải (2) tìm **I** và phân tích thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{R}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{p}}-\dfrac{1}{\mathrm{p}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}}\right)$ (3)

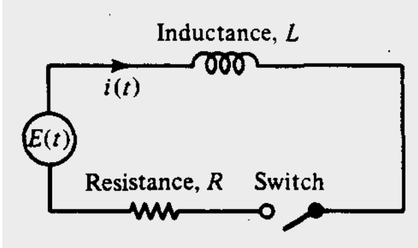
Biến đổi Laplace ngược hai vế của (3) ta được: i(t) = $\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{I}]=\dfrac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}}\right)$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

Câu 10

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân $L\dfrac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.

Trường hợp $E(t)=E_o\sin 6t$ với $E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:



Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[i'(t)]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{6E_o}{p^2+36}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\times\dfrac{6}{(p^2+36)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+6B}{p^2+36}+\dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A,B,C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I]=\dfrac{E_o}{L}\left(A\cos 6t+B\sin 6t+Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)=1+e^{2t}-10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)\,du$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=3 \\ x+y'-7y=e^{2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

Câu 13 (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+12y=6+e^{-t}+\sin 5t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 8	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 9 đến câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 1 tháng 6 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0010</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (5/6/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (5/6/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0011 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=16xy-6y+9$ và $v(x,y)=8y^2-8x^2+6x+1$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}$

C) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=4}\frac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i(ie^{-3}+6)$

D) $\displaystyle\oint_{|z-3|=2}\frac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2},3i]$

Câu 3 Cho phương trình vi phân: $y'+5y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 6.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY+5Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3}+6$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+5)}+\dfrac{6}{p+5}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{1}{p+5}\right)+\dfrac{6}{p+5}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{-3(t-2\pi)}-e^{-5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi)+6e^{-5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 4 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^t e^{5u}ch4udu\right]=\dfrac{p-5}{p((p-5)^2-4)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D)Nếu $f(t)=\begin{cases}\sin 4t & khi \quad 0<t<2\pi\\ 0 & khi \quad 2\pi<t<3\pi\end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-pt}\sin 4t dt$

Câu 5 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=-2i$ là $e^{\frac{1}{z+2i}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=-2i$ là $f(z)=(z+2i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^{n-3}}$

C) $\oint_{|z+3i|=3}(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}},-2i]$ **D)** $\oint_{|z-3i|=4}(z+2i)^3 e^{\frac{1}{z+2i}}dz=2\pi i\frac{1}{4!}=\frac{\pi i}{12}$

Câu 6 Cho số phức z = $\frac{17}{4+i}-i^{2019}+e^{3+5i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\mathrm{Re}\,z=4+e^3\cos 5$, $\mathrm{Im}\,z=e^3\sin 5$

B) $\mathrm{Re}\,z=4+e^3\cos 5$, $\mathrm{Im}\,z=-e^3\sin 5$

C) $\mathrm{Re}\,z=4+e^3\cos 5$, $\mathrm{Im}\,z=-2+e^3\sin 5$

D) $\mathrm{Re}\,z=4+e^3\cos 5$, $\mathrm{Im}\,z=2+e^3\sin 5$

Câu 7 Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o=a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{-\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2=(a+ib)e^{-\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3=(a+ib)e^{-\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4=(a+ib)e^{-\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5=(a+ib)e^{-2\pi i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

B) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

C) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

D) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

Câu 8 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình w = $\frac{6}{z}=u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=1$.

B) Đường tròn $u^2+v^2=6$.

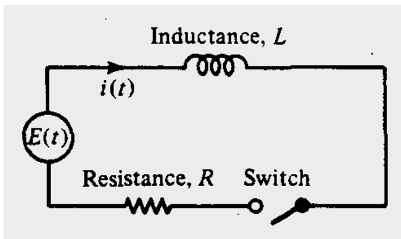
C) Đường tròn $u^2+v^2=36$.

D) Đường thẳng $u^2+v^2=\sqrt{6}$.

Câu 9

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$$ với i(0) = 0 và R,L là các hằng số dương.



Trường hợp $E(t)=E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[\mathrm{i(t)}]\Rightarrow\mathscr{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[\mathrm{i'(t)}]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\frac{E_o}{p}$ (2)

Giải (2) tìm **I** và phân tích thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\frac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\mathrm{p}}-\frac{1}{\mathrm{p}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}}\right)$ (3)

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (3) ta được: i(t) = $\mathscr{L}^{-1}[\,\mathrm{I}\,]=\frac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}}\right)$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

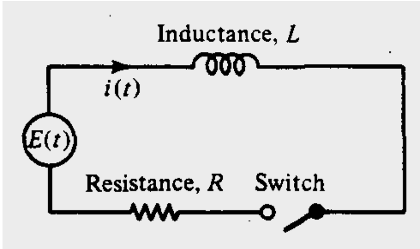
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

C) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 10

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân $L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với $i(0)=0$ và R,L là các hằng số dương.



Trường hợp $E(t)=E_o\sin 6t$ với $E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt $\mathbf{I}=\mathbf{I}(p)=\mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[i'(t)]=p\mathbf{I}-i(0)=p\mathbf{I}$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $Lp\mathbf{I}+R\mathbf{I}=\frac{6E_o}{p^2+36}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: $\mathbf{I}=\frac{E_o}{L}\times\frac{6}{(p^2+36)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $\mathbf{I}=\frac{E_o}{L}\left(\frac{Ap+6B}{p^2+36}+\frac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A,B,C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[\,I\,]=\frac{E_o}{L}\left(A\cos 6t+B\sin 6t+Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)=1+e^{2t}-10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)\,du$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=3 \\ x+y'-7y=e^{2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

Câu 13 (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+12y=6+e^{-t}+\sin 5t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 8	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 9 đến câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 1 tháng 6 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0011</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:.................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (5/6/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (5/6/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0100 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=4}\dfrac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}dz=2\pi i(ie^{-3}+6)$ **D)** $\oint\limits_{|z-3|=2}\dfrac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}[\dfrac{e^{iz}+6z+2}{(z-3i)^2},3i]$

Câu 2 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình w = $\dfrac{6}{z}=u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=1$.
C) Đường tròn $u^2+v^2=36$.
B) Đường tròn $u^2+v^2=6$.
D) Đường thẳng $u^2+v^2=\sqrt{6}$.

Câu 3 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$ **B)** $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch4u\,du\right]=\dfrac{p-5}{p((p-5)^2-4)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D)Nếu $f(t)=\begin{cases}\sin 4t & khi\quad 0<t<2\pi\\ 0 & khi\quad 2\pi<t<3\pi\end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin 4t\,dt$

Câu 4 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=-2i$ là $e^{\frac{1}{z+2i}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=-2i$ là $f(z)=(z+2i)^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+2i)^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z+2i)^{n-3}}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=3}(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}}dz=2\pi i\operatorname{Res}[(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}},-2i]$ **D)** $\oint\limits_{|z-3i|=4}(z+2i)^3e^{\frac{1}{z+2i}}dz=2\pi i\dfrac{1}{4!}=\dfrac{\pi i}{12}$

Câu 5 Cho số phức z = $\dfrac{17}{4+i}-i^{2019}$ + e^{3+5i}. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re}z=4+e^3\cos 5$, $\operatorname{Im}z=e^3\sin 5$
B) $\operatorname{Re}z=4+e^3\cos 5$, $\operatorname{Im}z=-e^3\sin 5$
C) $\operatorname{Re}z=4+e^3\cos 5$, $\operatorname{Im}z=-2+e^3\sin 5$
D) $\operatorname{Re}z=4+e^3\cos 5$, $\operatorname{Im}z=2+e^3\sin 5$

Câu 6 Cho phương trình vi phân: $y'+5y=u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 6.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY+5Y=\dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3}+6$ (2)

♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+5)}+\dfrac{6}{p+5}$ (3)

♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{1}{p+5}\right)+\dfrac{6}{p+5}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{-3(t-2\pi)}-e^{-5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi)+6e^{-5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 7</u> Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o=a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{-\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2=(a+ib)e^{-\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3=(a+ib)e^{-\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4=(a+ib)e^{-\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5=(a+ib)e^{-2\pi i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

<u>Câu 8</u> Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=16xy-6y+9$ và $v(x,y)=8y^2-8x^2+6x+1$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

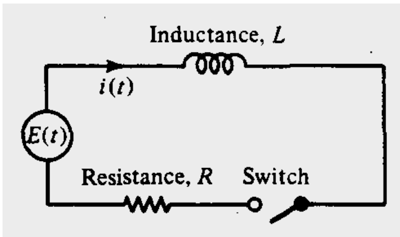
A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

<u>Câu 9</u>

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$L\dfrac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với i(0) = 0 và R,L là các hằng số dương.

Trường hợp $E(t)=E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:



Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}\left[\mathrm{i(t)}\right]\Rightarrow\mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}\left[\mathrm{i'(t)}\right]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{E_o}{p}$ (2)

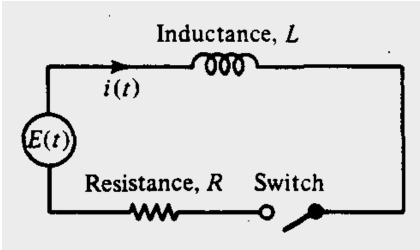
Giải (2) tìm **I** và phân tích thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{R}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{p}}-\dfrac{1}{\mathrm{p}+\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}}\right)$ (3)

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (3) ta được: i(t) = $\mathscr{L}^{-1}\left[\,\mathrm{I}\,\right]=\dfrac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}}\right)$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

<u>Câu 10</u>

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân $L\dfrac{di(t)}{dt}+R\,i(t)\overset{(1)}{=}E(t)$ với $i(0)=0$ và R,L là các hằng số dương.



Trường hợp $E(t)=E_o\sin 6t$ với $E_o=const>0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt $\mathbf{I}=\mathbf{I}(p)=\mathscr{L}[i(t)]\Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right]=\mathscr{L}[i'(t)]=p\mathbf{I}-i(0)=p\mathbf{I}$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $Lp\mathbf{I}+R\mathbf{I}=\dfrac{6E_o}{p^2+36}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: $\mathbf{I}=\dfrac{E_o}{L}\times\dfrac{6}{(p^2+36)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $\mathbf{I}=\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+6B}{p^2+36}+\dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A,B,C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[\,I\,]=\dfrac{E_o}{L}\left(A\cos 6t+B\sin 6t+Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)=1+e^{2t}-10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)\,du$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases}x'-6y=3\\ x+y'-7y=e^{2t}\end{cases},\ \text{điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

Câu 13 (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+12y=6+e^{-t}+\sin 5t \ \text{ với điều kiện } \ y(0)=0 \ \text{ và } \ y'(0)=0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 8	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 9 đến câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 1 tháng 6 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM BỘ MÔN TOÁN **THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018*** **MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE** Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0100		Họ, tên sinh viên: .... Mã số sinh viên:............................... Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ...... *Thời gian* : 90 phút (5/6/2018) **Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải. ***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.***
Giám thị 1	***Giám thị 2***	
Giáo viên chấm thi 1&2	**ĐIỂM**	

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi: 5/6/2018)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0001

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	A	D	C	B	D	A	B	D	B	C

Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0010

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	D	A	D	C	B	D	A	B	C

Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0011

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	D	A	B	D	A	D	C	B	C

Mã đề: 0010-0506-2018-0100-0100

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	D	C	B	D	A	A	D	B	B	C

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	Nội dung	*Điểm*
Câu 11		**1 điểm**
	Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại $$y(t)= 1+e^{2t}-10y(t)*\cos 3t$$	0,25đ
	Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được $\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[1+e^{2t}]-10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$ $Y = \frac{1}{p}+\frac{1}{p-2}-10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t]$	0,25đ
	$\Leftrightarrow\ Y = \frac{2p-2}{p(p-2)}\ -10Y\frac{p}{p^2+9}$ Giải phương trình với Y là ẩn ta được	0,25đ
	$$Y = \frac{(2p-2)(p^2+9)}{p(p-2)(p+1)(p+9)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p+9}$$ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm	0,25đ

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p-2} + C\frac{1}{p+1} + D\frac{1}{p+9}]$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = A + Be^{2t} + Ce^{-t} + De^{-9t}$$

Tìm A,B,C dựa vào đẳng thức (*)

0,5đ

$$\frac{(2p-2)(p^2+9)}{p(p-2)(p+1)(p+9)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+9}$$

$$A = 1, \quad B = \frac{13}{33}, \quad C = -\frac{5}{3}, \quad D = \frac{25}{11}$$

Vậy nghiệm phương trình tích phân là $y(t) = 1 + \frac{13}{33}e^{2t} - \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{25}{11}e^{-9t}$

Câu 12 — 1,5đ

Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] - 6\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[3] \\ \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] - 7\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{2t}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX - 6Y = \dfrac{3}{p} \\ X + (p-7)Y = \dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$

0,5đ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{3p^2 - 21p + 42}{p(p-2)(p-1)(p-6)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{C}{p-1} + \dfrac{D}{p-6} \\ Y = \dfrac{p^2 - 3p + 6}{p(p-2)(p-1)(p-6)} = \dfrac{E}{p} + \dfrac{F}{p-2} + \dfrac{G}{p-1} + \dfrac{H}{p-6} \end{cases}$$

0,25đ

Biến đổi ngược hai vế ta được:

$$\begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[X] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p} + B\dfrac{1}{p-2} + C\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{D}{p-6}] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[E\dfrac{1}{p} + F\dfrac{1}{p-2} + G\dfrac{1}{p-1} + H\dfrac{1}{p-6}] \end{cases}$$

0,25đ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = A + Be^{2t} + Ce^{t} + De^{6t} \\ y = E + Fe^{2t} + Ge^{t} + He^{6t} \end{cases}$$

0,5đ

- Tìm A,B,C,D dựa vào

$$\frac{3p^2 - 21p + 42}{p(p-2)(p-1)(p-6)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p-6}$$

$$A = \frac{3\times 0^2 - 21\times 0 + 42}{(0-2)(0-1)(0-6)} = -\frac{7}{2}, \qquad B = \frac{3\times 2^2 - 21\times 2 + 42}{(2)(2-1)(2-6)} = -\frac{3}{2},$$

$$C = \frac{3\times(1)^2 - 21\times(1) + 42}{(1)(1-2)(1-6)} = \frac{24}{5} \qquad D = \frac{3\times(6)^2 - 21\times(6) + 42}{(6)(6-2)(6-1)} = \frac{1}{5}$$

- Tìm E,F,G,H dựa vào

$$\frac{p^2 - 3p + 6}{p(p-2)(p-1)(p-6)} = \frac{E}{p} + \frac{F}{p-2} + \frac{G}{p-1} + \frac{H}{p-6}$$

$$E = \frac{0^2 - 3\times 0 + 6}{(0-2)(0-1)(0-6)} = -\frac{1}{2}, \qquad F = \frac{2^2 - 3\times 2 + 6}{(2)(2-1)(2-6)} = -\frac{1}{2}$$

$$G = \frac{(1)^2 - 3\times(1) + 6}{(1)(1-2)(1-6)} = \frac{4}{5} \qquad H = \frac{(6)^2 - 3\times(6) + 6}{(6)(6-2)(6-1)} = \frac{1}{5}$$

Câu 13 **2 đ**

Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y - py(0) - y'(0) + 8(pY - y(0)) + 12Y = \mathscr{L}[6 + e^{-t} + \sin 5t]$$ **0.5đ**

$$\Leftrightarrow Y(p^2 + 8p + 12) = \frac{6}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{5}{p^2+25}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{7p^3 + 11p^2 + 180 + 150}{p(p+1)(p+2)(p+6)(p^2+25)}$$

0.5đ

Phân tích thành phân thức đơn giản

$$Y = \frac{7p^3 + 11p^2 + 180p + 150}{p(p+1)(p+2)(p+6)(p^2+25)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+6} + \frac{Ep + 5F}{p^2+25}$$

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+1} + C\frac{1}{p+2} + D\frac{1}{p+6} + E\frac{p}{p^2+25} + F\frac{5}{p^2+25}]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-6t} + E\cos 5t + F\sin 5t$$ **0.5đ**

Tìm A,B,C,D,E,F dựa vào đẳng thức:

$$\frac{7p^3 + 11p^2 + 180p + 150}{p(p+1)(p+2)(p+6)(p^2+25)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+6} + \frac{Ep + 5F}{p^2+25}$$

$$A = \frac{7\times0^3 + 11\times0^2 + 180\times0 + 150}{(0+1)(0+2)(0+6)(0^2+25)} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{7\times(-1)^3 + 11\times(-1)^2 + 180\times(-1) + 150}{(-1)(-1+2)(-1+6)((-1)^2+25)} = \frac{1}{5}$$

$$C = \frac{7\times(-2)^3 + 11\times(-2)^2 + 180\times(-2) + 150}{(-2)(-2+1)(-2+6)((-2)^2+25)} = -\frac{111}{116}$$

$$D = \frac{7\times(-6)^3 + 11\times(-6)^2 + 180\times(-6) + 150}{(-6)(-6+1)(-6+2)((-6)^2+25)} = \frac{341}{1220}$$

Từ đẳng thức (*) lần lượt cho $p = 1, p = 2$ ta được

$$\frac{7\times1^3 + 11\times1^2 + 180\times1 + 150}{1(1+1)(1+2)(1+6)(1^2+25)} = \frac{A}{1} + \frac{B}{1+1} + \frac{C}{1+2} + \frac{D}{1+6} + \frac{E\times1 + 5F}{1^2+25}$$

$$\frac{7\times2^3 + 11\times2^2 + 180\times2 + 150}{2(2+1)(2+2)(2+6)(2^2+25)} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2+1} + \frac{C}{2+2} + \frac{D}{2+6} + \frac{E\times2 + 5F}{2^2+25}$$

	Thay $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{111}{116}$, $D=\frac{341}{1220}$ vào hai phương trình trên và giải hệ với ẩn là E,F ta được: $E=-\frac{40}{1769}$, $F=-\frac{13}{1769}$ Vậy nghiệm phương trình là $$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{111}{116}e^{-2t}+\frac{341}{1220}e^{-6t}-\frac{40}{1769}\cos 5t-\frac{13}{1769}\sin 5t$$ **b)** $\lim\limits_{t\to+\infty}[Be^{-t}+Ce^{-2t}+De^{-6t}]=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn $$y(t)\approx A+E\cos 5t+F\sin 5t=A+\sqrt{E^2+F^2}\left(\frac{E}{\sqrt{E^2+F^2}}\cos 5t+\frac{F}{\sqrt{E^2+F^2}}\sin 5t\right)$$ Đặt $\sin\alpha=\frac{E}{\sqrt{E^2+F^2}},\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{E^2+F^2}}$ $$y(t)\approx A+\sqrt{E^2+F^2}(\sin\alpha\cos 5t+\cos\alpha\sin 5t)=A+\sqrt{E^2+F^2}\sin(5t+\alpha)$$ Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian t có biên độ dao động $\sqrt{E^2+F^2}=\frac{1}{\sqrt{1769}}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o=A=\frac{1}{2}$.	***0.5đ***

*** HẾT***